Introducción a Series de Tiempo

Por: John Villavicencio

CONTENIDO

Introducción a Series de Tiempo

Una serie tiempo es una secuencia de observaciones, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y, espaciados entre sí de manera uniforme, así los datos usualmente son dependientes entre sí. El principal objetivo de una serie de tiempo X_t, donde $t = 1,2,\dots,n$ es su análisis para hacer pronóstico.

Algunos ejemplos donde se puede utilizar series temporales

Economía y Marketing

- Proyecciones del empleo y desempleo.
- Evolución del índice de precios de la leche.
- Beneficios netos mensuales de cierta entidad bancaria.
- Índices del precio del petróleo.

Demografía

- Número de habitantes por año.
- Tasa de mortalidad infantil por año.

Medioambiente

- Evolución horaria de niveles de óxido de azufre y de niveles de óxido de nitrógeno en una ciudad durante una serie de años.
- Lluvia recogida diariamente en una localidad.
- Temperatura media mensual.
- Medición diaria del contenido en residuos tóxicos en un río.

Componentes de una serie temporal

El análisis clásico de las series temporales se basa en la suposición de que los valores que toma la variable de observación es la consecuencia de tres componentes, cuya actuación conjunta da como resultado los valores medidos, estos componentes son:

a.- Componente tendencia.- Se puede definir como un cambio a largo plazo que se produce en la relación al nivel medio, o el cambio a largo plazo de la media. La tendencia se identifica con un movimiento suave de la serie a largo plazo.

b.- Componente estacional.- Muchas series temporales presentan cierta periodicidad o dicho de otro modo, variación de cierto período (semestral, mensual, etc.). Por ejemplo las Ventas al Detalle en Puerto Rico aumentan por los meses de noviembre y diciembre por las festividades navideñas. Estos efectos son fáciles de entender y se pueden medir explícitamente o incluso se pueden eliminar de la serie de datos, a este proceso se le llama desestacionalización de la serie.

c.- Componente aleatoria.- Esta componente no responde a ningún patrón de comportamiento, sino que es el resultado de factores fortuitos o aleatorios que inciden de forma aislada en una serie de tiempo.

De estos tres componentes los dos primeros son componentes determinísticos, mientras que la última es aleatoria. Así se puede denotar la serie de tiempo como

$$X_t = T_t + E_t + I_t$$

donde T_t es la tendencia, E_t es la componente estacional e I_t es la componente aleatoria.

2.- Clasificación descriptiva de las series temporales

Las series temporales se pueden clasificar en:

a.- Estacionarias.- Una serie es estacionaria cuando es estable a lo largo del tiempo, es decir, cuando la media y varianza son constantes en el tiempo. Esto se refleja gráficamente en que los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de una media constante y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.

b.- No estacionarias.- Son series en las cuales la tendencia y/o variabilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante.

3.- Procesos Estocásticos

Desde un punto de vista intuitivo, un proceso estocástico se describe como una secuencia de datos que evolucionan en el tiempo. Las series temporales se definen como un caso particular de los procesos estocásticos.

3.1.-Proceso estocástico estacionario

Un proceso estocástico se dice que es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o rezago entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza.

Sea X_t una serie de tiempo entonces con estas propiedades:

$$Media \quad E(X_t) = E(X_{t+k}) = \mu$$

$$Varianza \quad V(X_t) = V(X_{t+k}) = \sigma^2$$

$$Covarianza \quad \gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

donde γ_k, la covarianza (o autocovarianza) al rezago k, es la covarianza entre los valores de X_t y X_{t+k}, que están separados k periodos.

En resumen si una serie de tiempo es estacionaria, su media, su varianza y su autocovarianza (en diferentes rezagos) permanecen iguales sin importar el momento en el cual se midan; es decir, son invariantes respecto al tiempo.

3.2.- Ruido blanco("white noise")

Un ruido blanco es un caso simple de los procesos estocásticos, donde los valores son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo con media cero e igual varianza, se denota por ε_t.

$$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \qquad cov\left(\varepsilon_{t_i},\varepsilon_{t_j}\right)=0 \quad \forall t_i \neq t_j$$

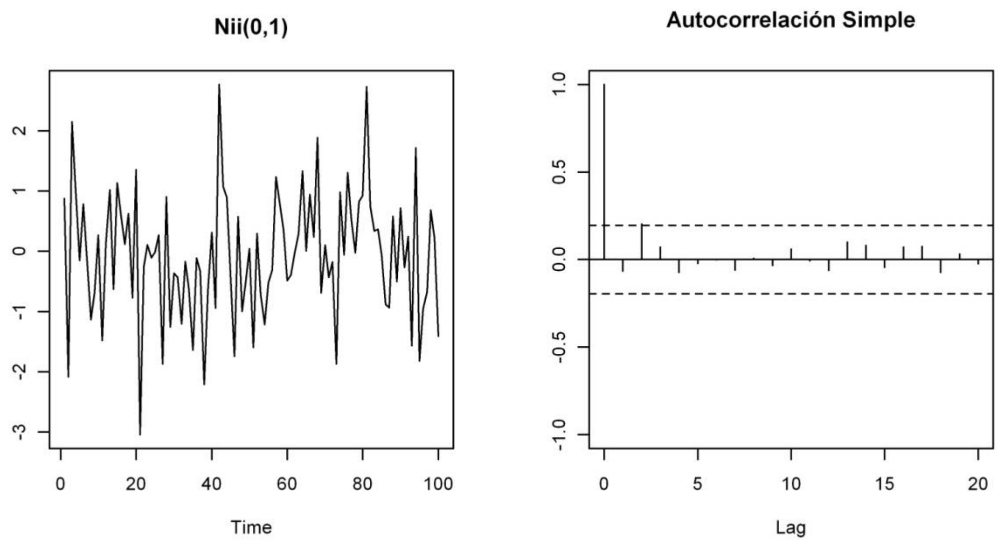


Fig. 3.1 La grafica muestra un ruido blanco con media cero y varianza constante e igual a uno.

3.3.- Camino aleatorio ("Random Walk")

Es camino aleatorio o camino al azar es un proceso estocástico X_t, donde la primera diferencia de este proceso estocástico es un ruido blanco, esto es $\nabla X_t = \varepsilon_t$.

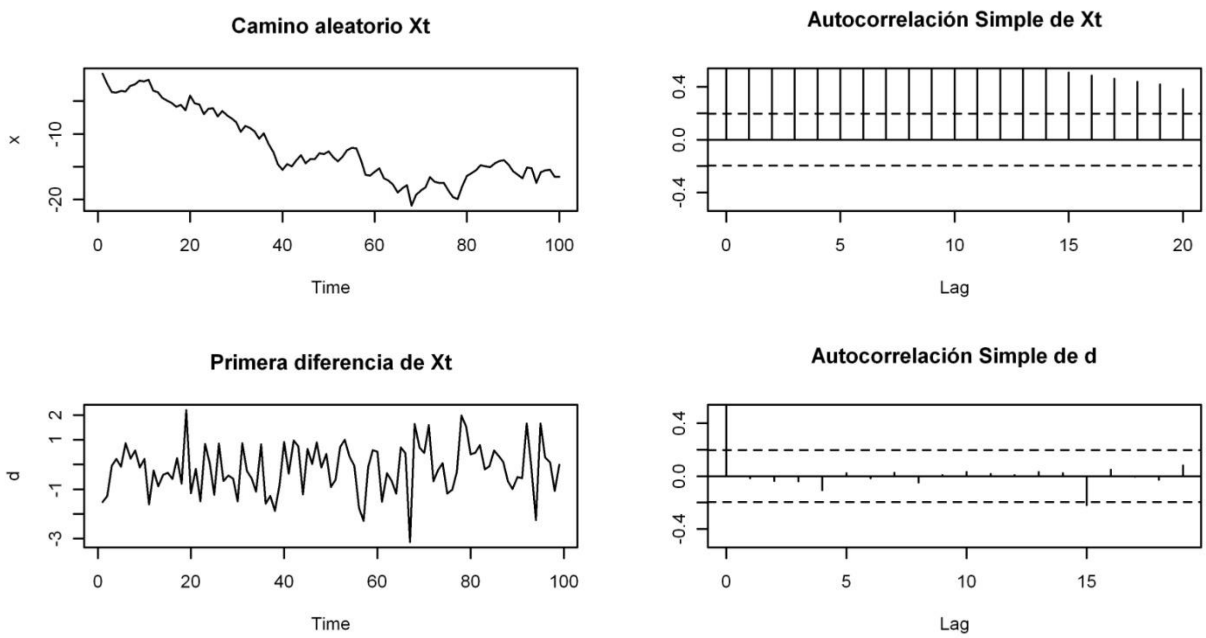


Fig. 3.2 La figura muestra el proceso estocástico X_t y su autocorrelación simple, y la primera diferencia del proceso estocástico y su gráfica de autocorrelación.

4.-Autocorrelación

En ocasiones en una serie de tiempo acontece, que los valores que toma una variable en el tiempo no son independientes entre sí, sino que un valor determinado depende de los valores anteriores, existen dos formas de medir esta dependencia de las variables.

4.1.- Función de autocorrelación (ACF)

La autocorrelación mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos.

$$\rho_j = corr(X_j, X_{j-k}) = \frac{cov(X_j, X_{j-k})}{\sqrt{V(X_j)}\sqrt{V(X_{j-k})}}$$

La función de autocorrelación simple tiene las siguientes propiedades:

- $\rho_0 = 1$
- $-1 \leq \rho_j \leq 1$
- $Simetría\ \rho_j = \rho_{-j}$

4.2.- Función de Autocorrelación Parcial (PACF)

La autocorrelación parcial mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos cuando no se considera la dependencia creada por los retardos intermedios existentes entre ambas.

$$\pi_j = corr(X_j, X_{j-k}/X_{j-1}X_{j-2} \dots X_{j-k+1})$$

$$\pi_j = \frac{cov(X_j - \hat{X}_j, X_{j-k} - \hat{X}_{j-k})}{\sqrt{V(X_j - \hat{X}_j)}\sqrt{V(X_{j-k} - \hat{X}_{j-k})}}$$

4.3.- Prueba de Ljung-Box

Esta prueba permite probar en forma conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación son simultáneamente iguales a cero, esto es que son independientes, está definida como

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2_{(m)}$$

donde n tamaño de la muestra, m longitud del rezago.

Ho: Las autocorrelaciones son independientes.
Ha: Las autocorrelaciones no son independientes.

En una aplicación, si el Q calculada excede el valor Q crítico de la tabla ji cuadrada al nivel de significancia seleccionado, no se acepta la hipótesis nula de que todos los coeficientes de autocorrelación son iguales a cero; por lo menos algunos de ellos deben ser diferentes de cero.

5.- Procesos Lineales Estacionarios

5.1 Procesos Autoregresivos $\boldsymbol{AR(p)}$

Los modelos autoregresivos se basan en la idea de que el valor actual de la serie, X_t, puede explicarse en función de p valores pasados $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$, donde p determina el número de rezagos necesarios para pronosticar un valor actual.

El modelo autoregresivo de orden p está dado por:

$$X_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \cdots + \emptyset_p X_{t-p} + \varepsilon_t \text{ ...(1)}$$

Expresado en términos del operador de retardos,

$$\left(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \cdots - \emptyset_p L^p\right) X_t = \varepsilon_t$$

$$\emptyset_p(L) X_t = \varepsilon_t$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco y $\emptyset_0, \emptyset_1, \emptyset_2, \dots, \emptyset_p$ son los parámetros del modelo.

Proceso Autoregresivo de Orden 1: $\boldsymbol{AR(1)}$

En los proceso $AR(1)$ la variable X_t está determinado únicamente por el valor pasado, esto es X_{t-1}.

$$X_t = \emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco con media 0 y varianza constante σ^2, $\emptyset$es el parámetro. Recuérdese además que suponemos que el proceso es no anticipante, es decir, el futuro no incluye en el pasado.

Para verificar que el modelo $AR(1)$ es estacionario para cualquier valor del parámetro, es necesario probar las siguientes condiciones.

a) Estacionario en media

$E(X_t) = E(X_t = \emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t) = \emptyset E(X_{t-1})$

Para que el proceso sea estacionario, la media debe ser constante y finita en el tiempo, esto implica que:

$$E(X_t) = \emptyset E(X_t)$$

$$(1 - \emptyset) E(X_t) = 0$$

$$E(X_t) = \frac{0}{1-\emptyset} = 0$$

Por tanto, para que el proceso sea estacionario el parámetro $\emptyset \neq 1$.

b) Estacionario en covarianza:

Para que un proceso $AR(1)$ sea estacionario, la varianza tiene que ser constante y finita en el tiempo:

$$\gamma_0 = E(\,X_t - E(X_t))^2 = E(\emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t - 0)^2 = \emptyset^2 V(X_{t-1}) + \sigma^2$$

Dada la autocorrelación del proceso

$$E(X_{t-1}\varepsilon_t) = E[(X_{t-1} - 0)(\varepsilon_t - 0)] = cov(X_{t-1}\varepsilon_t) = 0$$

Bajo el supuesto de que el proceso es estacionario,

$$E(X_{t-1})^2 = V(X_{t-1}) = V(X_t) = \gamma_0$$

Por tanto $\gamma_0 = \emptyset\gamma_0 + \sigma^2$, entonces $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\emptyset^2}$

Para que un proceso sea estacionario, varianza constante y finita, es necesario que $|\emptyset| < 1$

La función de autocovarianza de orden k es:

$$\gamma_k = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-k} - E(X_{t-k})\big) = E[(\emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t)X_{t-k}]$$

$$\gamma_k = \emptyset E(X_t X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) = \emptyset \gamma_{k-1}$$

Por lo que:

$$\gamma_1 = \emptyset \gamma_0$$

$$\gamma_2 = \emptyset \gamma_1$$

$$\gamma_3 = \emptyset \gamma_2$$

.

.

.

Se puede concluir, por lo tanto, que el proceso $AR(1)$ es estacionario si y solo si $|\emptyset| < 1$.
La función de autocovarianza de un proceso $AR(1)$ estacionario es:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\emptyset^2} & k = 0 \\ \emptyset \gamma_{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

Los coeficientes de autocorrelación de un proceso estacionario $AR(1)$ son:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\emptyset \gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \emptyset \rho_{k-1}$$

La función de autocorrelación de un proceso $AR(1)$ estacionario es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \emptyset \rho_{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

Se puede demostrar fácilmente que la Función de Autocorrelación de un modelo $AR(1)$ es una función exponencial.

$$\rho_1 = \emptyset \rho_0 = \emptyset$$

$$\rho_2 = \emptyset \rho_1 = \emptyset^2$$

$$\rho_3 = \emptyset \rho_2 = \emptyset^3$$

.

.

.

Por lo que:

$$\rho_k = \emptyset^k, \text{donde } k = 1,2,3, \ldots$$

Una forma alterna de escribir el modelo $AR(1)$ es la siguiente:

$$X_t = \emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1 - \emptyset L)X_t = \varepsilon_t$$

$$X_t = \frac{1}{1 - \emptyset L}\varepsilon_t$$

El cociente $\frac{1}{1-\emptyset L}$ podemos expresarlo como un polinomio infinito, esto es:

$$\frac{1}{1 - \emptyset L} = 1 + \emptyset L + \emptyset^2 L^2 + \cdots$$

Sustituyendo se tiene

$$X_t = \frac{1}{1 - \emptyset L}\varepsilon_t = (1 + \emptyset L + \emptyset^2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t$$

$$X_t = \varepsilon_t + \emptyset\varepsilon_{t-1} + \emptyset^2\varepsilon_{t-2} + \emptyset^3\varepsilon_{t-3} + \cdots$$

Por lo que un modelo $AR(1)$ es una versión restringida de un modelo general de medias móviles.

De los resultados obtenidos podemos señalar como características más relevantes del modelo $AR(1)$ como:

- El modelo $AR(1)$ es siempre invertible.
- El modelo $AR(1)$ es estacionario siempre que se cumpla $|\emptyset| < 1$.
- El correlograma, representación gráfica de la función de autocorrelación, tendrá un comportamiento amortiguado hacia cero con todos los valores positivos, en caso de que $\emptyset > 0$, o bien alternando el signo, comenzando con negativo, si $\emptyset < 0$.
- La funcion de autocorrelación parcial se anula para retardos superiores a uno (el orden del modelo), coincidiendo, como es norma, este coeficiente de autocorrelación parcial.

Proceso Autoregresivo de Orden 2: $\boldsymbol{AR(2)}$

En los proceso $AR(2)$ la variable X_t está determinado por el valor pasado y el anterior a este.

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t es un ruido blanco.

Asumiendo estacionariedad las características del proceso son:

a) Media

$$E[(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2)X_t] = E[\varepsilon_t]$$

$$(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2)E[X_t] = 0$$

$$E[X_t] = \frac{0}{1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2}$$

$$E[X_t] = 0$$

b) Función de autocovarianza

$$\gamma_0 = E(X_t - E[X_t])^2 = E(X_t)^2 = E(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)^2$$

$$\gamma_0 = \emptyset_1^2 \gamma_0 + \emptyset_2^2 \gamma_0 + \sigma^2 + 2\emptyset_1\emptyset_2\gamma_1$$

$$(1 - \emptyset_1^2 - \emptyset_2^2)\gamma_0 = \sigma^2 + 2\emptyset_1\emptyset_2\gamma_1$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2 + 2\emptyset_1\emptyset_2\gamma_1}{1 - \emptyset_1^2 - \emptyset_2^2}$$

$$\gamma_1 = E(X_t - E[X_t])(X_{t-1} - E[X_{t-1}]) = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)X_{t-1}]$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 E(X_{t-1})^2 + \emptyset_2 E(X_{t-2}X_{t-1}) + E(\varepsilon_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{\emptyset_1\gamma_0}{1 - \emptyset_2}$$

γ_0 y γ_1 proporcionan las dos primeras autocovarianzas en función de los parámetros $\emptyset_1$ y $\emptyset_2$ y de la varianza del ruido blanco σ^2.

Las autocovarianzas de orden k, para todo $k > 1$ son:

$$\gamma_k = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-k} - E(X_{t-k})\big) = E(X_t X_{t-k})$$

$$\gamma_k = E\big((\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)X_{t-k}\big)$$

$$\gamma_k = \emptyset_1\gamma_{k-1} + \emptyset_2\gamma_{k-2}$$

La función de autocovarianza de un modelo $AR(2)$ es:

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_0, & k = 0 \\ \gamma_{1,} & k = 1 \\ \gamma_k = \emptyset_1\gamma_{k-1} + \emptyset_2\gamma_{k-2,} & k > 1 \end{cases}$$

c) Coeficiente de autocorrelación

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\emptyset_1\gamma_{k-1} + \emptyset_2\gamma_{k-2}}{\gamma_0} = \emptyset_1\rho_{k-1} + \emptyset_2\rho_{k-2} \quad para\ k = 1,2,3, \ldots$$

Una forma general de escribir los coeficientes de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1} + \emptyset_2\rho_{k-2}, & k > 0 \end{cases}$$

Condiciones de estacionariedad

Modelo $\boldsymbol{AR(1)}$: $X_t = \emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t$, entonces $(1 - \emptyset L)X_t = \varepsilon_t$

Polinomio autoregresivo: $\emptyset_1(L) = 1 - \emptyset L$, las raíces de $1 - \emptyset L$=0 son:

$$L = \frac{1}{\emptyset}$$

La condición de estacionariedad del podelo $AR(1)$ es:

$$|L| = \left|\frac{1}{\emptyset}\right| > 0, \text{ entonces } |\emptyset| < 1$$

Modelo $\boldsymbol{AR(2)}$: $X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$, entonces $(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2)X_t = \varepsilon_t$

Polinomio autoregresivo $\emptyset_2(L) = 1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2$, las raíces de $1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 = 0$ son:

$$L_1, L_2 = \frac{\emptyset_1 \pm \sqrt{\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2}}{-2\emptyset_2}$$

La condición de estacionariedad del modelo $AR(2)$ es:

$$|L_1| = \left|\frac{\emptyset_1 + \sqrt{\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2}}{-2\emptyset_2}\right| > 1 \text{ y } |L_2| = \left|\frac{\emptyset_1 - \sqrt{\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2}}{-2\emptyset_2}\right| > 1$$

- Si el radicando $(\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2) > 0$, las raíces son reales.
- Si el radicando $(\emptyset_1^2 + 4\emptyset_2) < 0$, las raíces son complejas.

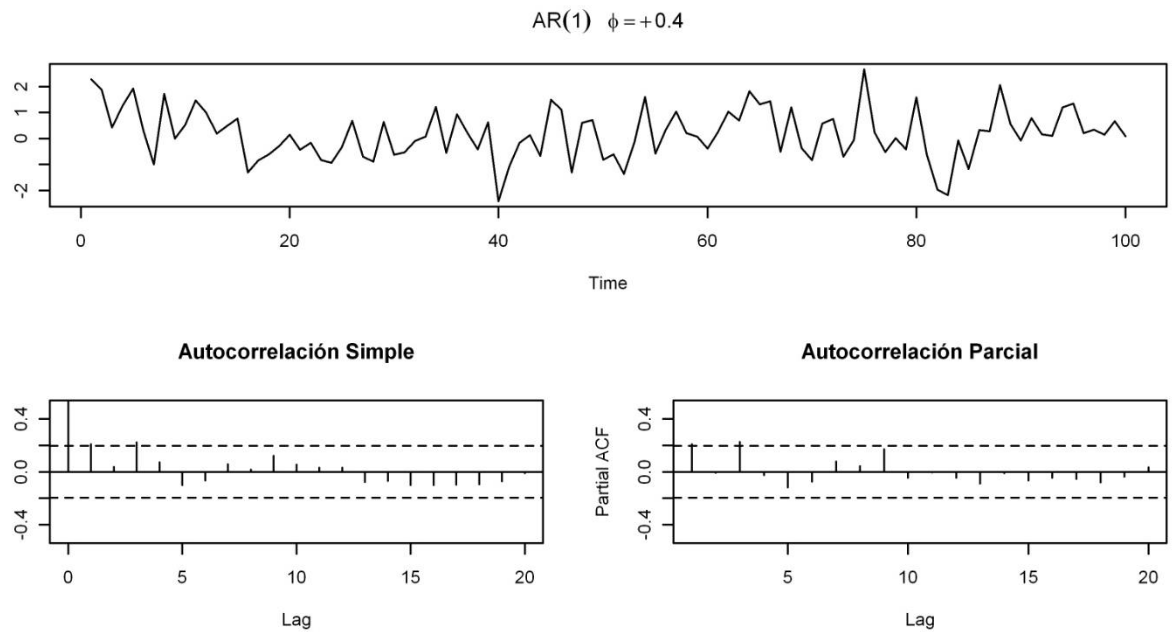


Fig. 5.1 La figura muestra la simulación de un proceso autoregresivo de orden uno, esto es

$X_t = 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t$, con sus respectivas gráficas de autocorrelación simple y parcial.

5.2 Proceso de Medias Móviles $\boldsymbol{MA(q)}$

Modelo "determinados por una fuente externa". Estos modelos suponen linealidad, el valor actual de la serie, X_t, está influenciado por los valores de la fuente externa.

El modelo de promedio móviles de orden q está dado por:

$$X_t = \theta_0 - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} - \varepsilon_t \ldots (2)$$

Expresado en términos del polinomio operador de retardos se tiene:

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$X_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco, y $\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ son los parámetros del modelo.

Proceso de Media Móvil de orden 1: $\boldsymbol{MA(1)}$

Lo modelos de medias móviles determina el valor de X_t en función de la innovación actual y su primer retardo, esto es:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

Expresado en función del polinomio operador de retardos es:

$$X_t = (1-\theta)\varepsilon_t$$

$$X_t = \theta_1(L)\varepsilon_t$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco y θes el parámetro.

a) Estacionario en media

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})$$

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - \theta E(\varepsilon_{t-1})$$

$$E(X_t) = 0$$

Es estacionario en media para todo valor del parámetro

b) Estacionario en covarianza

$$\gamma_0 = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = E(X_t)^2 = E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t)^2 + \theta^2(\varepsilon_{t-1})^2 - 2\theta E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - 0$$

$$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma^2 < \infty$$

La autocovarianza para γ_1y γ_2 es:

$$\gamma_1 = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-1} - E(X_{t-1})\big) = E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})$$

$$\gamma_1 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) - \theta E(\varepsilon_{t-1})^2 - \theta E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = -\theta\sigma^2 < \infty$$

$$\gamma_2 = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-2} - E(X_{t-2})\big) = E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3})$$

$$\gamma_2 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) - \theta E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) - \theta E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}) = 0$$

Una forma general de la función de autocovarianza es:

$$\gamma_2 = \begin{cases} \gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma^2 & k = 0 \\ \gamma_1 = -\theta\sigma^2 & k = 1 \\ \gamma_2 = 0 & k > 1 \end{cases}$$

La función de autocovarianza es finita y depende sólo de k mas no del tiempo, esto para cualquier valor del parámetro θ. Esto implica que no es necesario poner restricciones al parámetro θ para que el $MA(1)$ sea estacionario.

La función de autocorrelación de un proceso $MA(1)$ es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Proceso de Media Móvil de orden 2: $MA(2)$

Consideremos el modelo de medias móviles de orden 2:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Donde los parámetros son θ_1 y θ_2, además ε_t es un proceso de ruido blanco. Este proceso es estacionario para cualquier valor de θ_1 y θ_2.

Las características más importantes son:

a) Estacionario en media

$$E(X_{t)} = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = 0$$

b) Función de autocovarianza $\gamma_k, k = 0,1,2,3, \ldots$

$$\gamma_0 = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-1} - E(X_t)\big)\big] = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})]$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-2} - E(X_t)\big)\big] = E(X_t X_{t-2})$$

$$\gamma_2 = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \varepsilon_{t-4})]$$

$$\gamma_2 = -\theta_2 \sigma^2$$

$$\gamma_3 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-3} - E(X_t)\big)\big] = E(X_t X_{t-3})$$

$$\gamma_3 = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3} - \theta_1\varepsilon_{t-4} - \theta_2\varepsilon_{t-5})]$$

$$\gamma_3 = 0$$

En resumen las autocovarianzas de un $MA(2)$ son:

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_0 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma^2 & k=0 \\ \gamma_1 = (-\theta_1+\theta_1\theta_2)\sigma^2 & k=1 \\ \gamma_2 = -\theta_2\sigma^2 & k=2 \\ \gamma_3 = 0 & k>2 \end{cases}$$

Las funciones de autocorrelación están dadas por:

$$\rho_k = \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k=1 \\ \rho_2 = \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k=2 \\ \rho_3 = 0 & k>2 \end{cases}$$

Condiciones de invertibilidad

Modelo $MA(1)$: $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$, entonces $X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$.

El polinomio de medias móviles esta dado por $\theta_1(L) = 1 - \theta L$, para encontrar las raíces del polinomio se tiene que resolver la ecuación $1 - \theta L = 0$, entonces $L = \frac{1}{\theta}$.

La condición de invertibilidad para un modelo $MA(1)$ está dado por: $|L| = \left|\frac{1}{\theta}\right| > 1$, esto es $|\theta| < 1$.

Modelo $MA(2)$: $X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$, entonces $X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)\varepsilon_t$.

El polinomio de medias móviles esta dado por $\theta_2(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_1 L^2$, para encontrar las raíces del polinomio se tiene que resolver la ecuación $1 - \theta_1 L - \theta_1 L^2 = 0$, las raíces son:

$$L_1, L_2 = \frac{\theta_1 \mp \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}$$

Las condiciones de invertibilidad para el modelo $MA(2)$ están dados por:

$$|L_1| = \left|\frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}\right| > 1 \quad y \quad |L_2| = \left|\frac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}\right| > 1$$

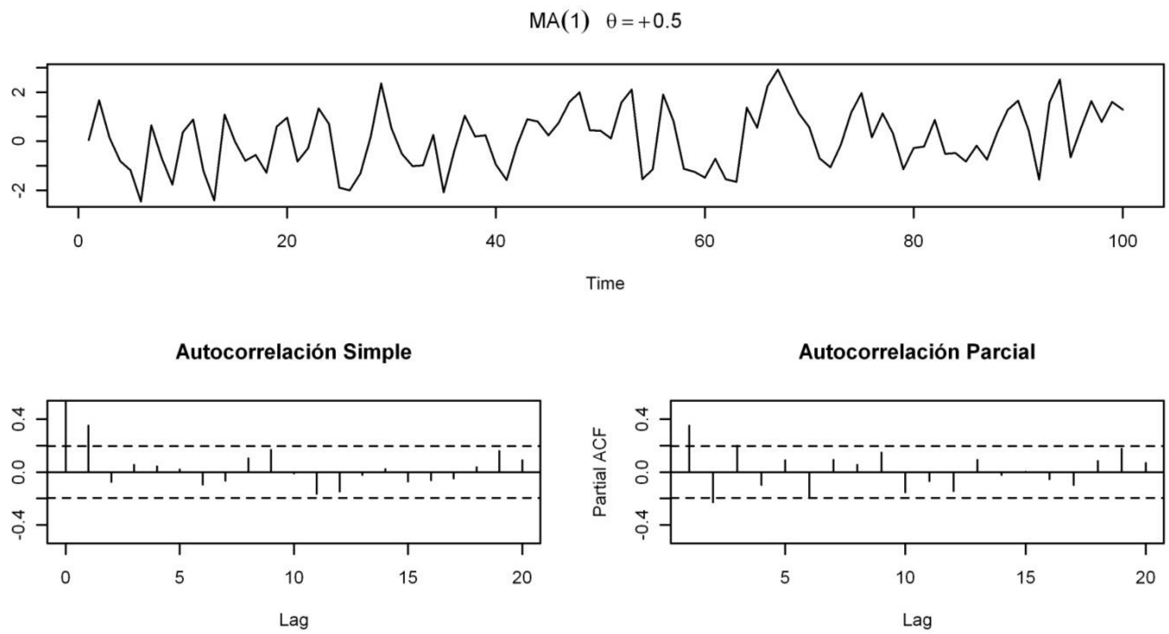


Fig. 5.2 La figura muestra un proceso de medias móviles de orden uno, esto es $X_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$ con sus respectivas gráficas de autocorrelación simple y parcial.

Los procesos de medias móviles se suelen denominar procesos de memoria corta, mientras que a los autoregresivos se les denomina procesos de memoria larga.

5.3 Proceso Autoregresivo de Medias Móviles $\boldsymbol{ARMA(p,q)}$

Es muy probable que una serie de tiempo, X_t, tenga características de AR y de MA a la vez y, por consiguiente, sea $ARMA$. Así, X_t sigue un proceso $ARMA(p,q)$, en este proceso habrá p términos autoregresivos y q términos de media móvil.

$$X_t = c + \underbrace{\emptyset_1 X_{t-1} + \cdots + \emptyset_p X_{t-p}}_{\boldsymbol{AR(p)}} + \underbrace{\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t}_{\boldsymbol{MA(q)}}$$

donde ε_t es un proceso de ruido blanco, y $c, \emptyset_1, \dots, \emptyset_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ son los parámetros del modelo.

Para un proceso $ARMA(p,q)$ una condición de estacionariedad es la misma que para un proceso $AR(p)$, del mismo modo una condición de invertibilidad es la misma que para el proceso $MA(q)$.

El modelo $ARMA(p,q)$ se puede escribir en términos del operador de retardos como sigue:

$$\left(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \cdots - \emptyset_p L^p\right) X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$\emptyset_p(L)X_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

Donde

$\emptyset_p(L)$: es el polinomio autoregresivo.

$\theta_q(L)$: es el polinomio de medias móviles.

Si el proceso es estacionario su representación $MA(\infty)$ es

$X_t = \frac{\theta_q(L)}{\emptyset_p(L)}\varepsilon_t$, entonces $X_t = \varepsilon_t + \varphi_1\varepsilon_{t-1} + \varphi_2\varepsilon_{t-2} + \varphi_3\varepsilon_{t-3} + \cdots$

Si el proceso es invertible una representación $AR(\infty)$ es

$\frac{\emptyset_p(L)}{\theta_q(L)}X_t = \varepsilon_t$, entonces $X_t = \varepsilon_t + \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \pi_3 Y_{t-3} + \cdots$

Los pesos de la representación $MA(\infty)$, como de la forma $AR(\infty)$, están restringidos a depender del vector finito de parámetros del modelo $ARMA(p,q)$: $\emptyset_1, \dots, \emptyset_p, \theta_1, \dots, \theta_q$.

- Un proceso autoregresivo de medias móviles $ARMA(p,q)$ es estacionario sí y solo sí el módulo de las raíces del polinomio autoregresivo $\emptyset_p(L)$ está fuera del círculo unitario.

Las condiciones de estacionariedad del modelo $ARMA(p,q)$ vienen impuestas por la parte autoregresiva, dado que la parte de medias móviles finita siempre es estacionaria.

- Un proceso autoregresivo de medias móviles $ARMA(p,q)$ es invertible sí y solo sí el modulo de las raíces del polinomio de medias móviles $\theta_q(L)$ está fuera del circulo unirario.

Las condiciones de invertibilidad del modelo $ARMA(p,q)$ vienen impuestas por la parte de medias móviles, dado que la parte autoregresiva es siempre invertible, porque siempre está directamente escrita en forma autoregresiva.

Los modelos $ARMA(p,q)$ siempre va a compartir las características de delo modelo $AR(p)$ y $MA(q)$, esto es porque contiene a ambas estructuras a la vez. El modelo $ARMA(p,q)$ tiene media cero, varianza constante y finita y una función de autocorrelación infinita. La función de autocorrelación es infinita decreciendo rápidamente hacia cero.

Proceso autoregresivo de media móvil de orden (1,1): $\boldsymbol{ARMA(1,1)}$

Consideremos el modelo modelo $ARMA(1,1)$, donde X_t se determina en función de su pasado hasta el primer retardo, la innovación contemporánea y el pasado de la innovación hasta el retardo 1.

$$X_t = \emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

Donde ε_t sigue un proceso de ruido blanco, $\emptyset$ y θ son los parámetros del modelo.

Para comprobar la estacionariedad del modelo se calculan las raíces del polinomio autoregresico:

$1 - \emptyset L = 0$, entonces $|L| = \left|\frac{1}{\emptyset}\right|$ esto es $|\emptyset| < 1$

Para comprobar la condición de invertibilidad del modelo se calculan las raíces del polinomio de media móviles:

$1 - \theta L = 0$, entonces $|L| = \left|\frac{1}{\theta}\right|$ esto es $|\theta| < 1$

Características de un proceso $ARMA(1,1)$ estacionario

a) Media

$E(X_t) = E(\emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = \emptyset E(X_{t-1})$
$E(X_t) = 0$

b) función de autocovarianzas

$$\gamma_0 = E(X_t - E(X_t))^2 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(\emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2$$

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta^2 - 2\emptyset\theta)\sigma^2}{1 - \emptyset^2}$$

$$\gamma_1 = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-1} - E(X_{t-1})\big) = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E[(\emptyset X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})X_{t-1}]$$

$$\gamma_1 = \emptyset\gamma_0 - \theta\sigma^2$$

$$\gamma_1 = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-2} - E(X_{t-2})\big) = E(X_t X_{t-2})$$

$$\gamma_1 = \emptyset\gamma_1$$

Resumiendo las autocovarianzas de un $ARMA(1,1)$

$$\gamma_k \begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{(1+\theta^2 - 2\emptyset\theta)\sigma^2}{1-\emptyset^2} & k = 0 \\ \gamma_1 = \emptyset\gamma_0 - \theta\sigma^2 & k = 1 \\ \gamma_k = \emptyset\gamma_{k-1} & k > 1 \end{cases}$$

La función de autocorrelación de un $ARMA(1,1)$ es

$$\rho_k = \begin{cases} \rho_1 = \emptyset - \dfrac{\theta\sigma^2}{\gamma_0} & k = 0 \\ \rho_k = \emptyset\rho_{k-1} & k > 1 \end{cases}$$

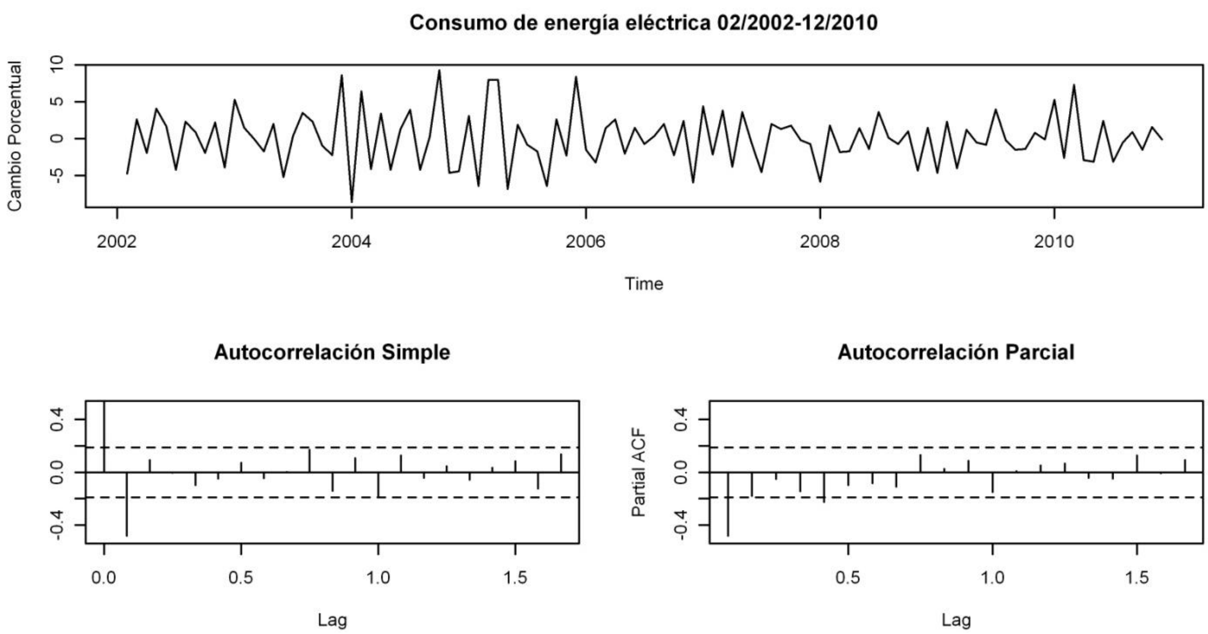


Fig. 5.3 La figura muestra la serie del cambio porcentual mes a mes de la serie desestacionalizada del consumo de energía eléctrica en Puerto Rico con sus respectivas graficas de autocorrelación simple y parcial.

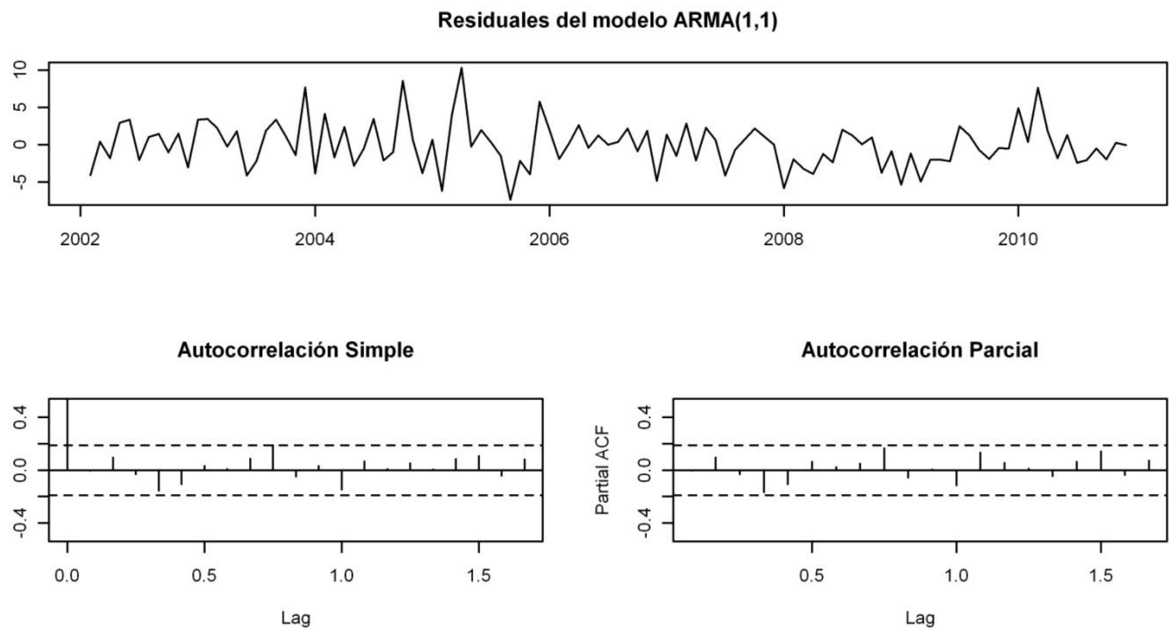


Fig. 5.4 La figura muestra los residuales del modelo $ARMA(1,1)$ y las respectivas autocorrelaciones para la serie consumo de energía eléctrica de Puerto Rico.

6.- Procesos Lineales no Estacionarios

6.1.- Proceso Autoregresivo Integrado y de Media Móvil $\boldsymbol{ARIMA(p,d,q)}$

Los modelos de series de tiempo analizados hasta ahora se basan en el supuesto de estacionariedad, esto es, la media y la varianza para una serie de tiempo son constantes en el tiempo y la covarianza es invariante en el tiempo. Pero se sabe que muchas series de tiempo y en especial las series económicas no son estacionarias, porque pueden ir cambiando de nivel en el tiempo o sencillamente la varianza no es constante en el tiempo, a este tipo de proceso se les considera procesos integrados. Por consiguiente, se debe diferencias una serie de tiempo d veces para hacerla estacionaria y luego aplicarla a esta serie diferenciada un modelo $ARMA(p,q)$, se dice que la serie original es $ARIMA(p,d,q)$, es decir, una serie de tiempo autoregresiva integrada de media móvil. Donde p denota el número de términos autoregresivos, d el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerla estacionaria y q el número de términos de la media móvil invertible.

Su expresión algebraica es:

$$X_t^d = c + \underbrace{\emptyset_1 X_{t-1}^d + \cdots + \emptyset_p X_{t-p}^d}_{\boldsymbol{AR(p)}} + \underbrace{\theta_1 \varepsilon_{t-1}^d + \theta_2 \varepsilon_{t-2}^d + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^d}_{\boldsymbol{MA(q)}} + \varepsilon_t^d$$

Expresado en forma del polinomio operador de retardos el modelo $ARIMA(p,d,q)$ es:

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t$$

donde X_t^d es al serie de las diferencia de orden d, ε_t^d es un proceso de ruido blanco, y $c, \emptyset_1, \dots, \emptyset_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ son los parámetros del modelo.

La construcción de los modelos $ARIMA(p,d,q)$ se lleva de manera iterativa mediante un proceso en el que se puede distinguir cuatro etapas:

- **Identificación.** Utilizando los datos ordenados cronológicamente se intentara sugerir un modelo $ARIMA(p,d,q)$ que merezca la pena ser investigada. El objetivo es determinar los valores $p, d\ y\ q$ que sean apropiados para reproducir la serie de tiempo. En esta etapa es posible identificar más de un modelo candidato que pueda describir la serie.
- **Estimación.** Considerando el modelo apropiado para la serie de tiempo se realiza inferencia sobre los parámetros.
- **Validación.** Se realizan contraste de diagnostico para validar si el modelo seleccionado se ajusta a los datos, so no es así, escoger el próximo modelo candidato y repetir los pasos anteriores.
- **Predicción.** Una vez seleccionado el mejor modelo candidato $ARIMA(p,d,q)$ se pueden hacer pronósticos en términos probabilísticos de los valores futuros.

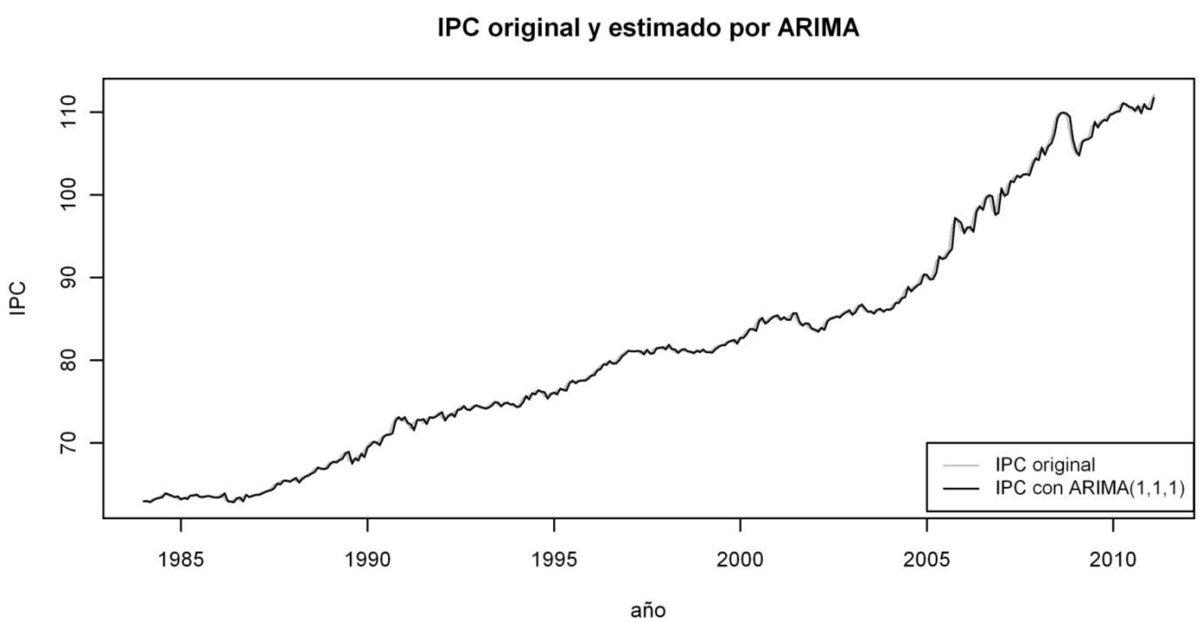


Fig. 6.1 La figura muestra la serie original del IPC y la serie estimada por el modelo $ARIMA(1,1,1)$

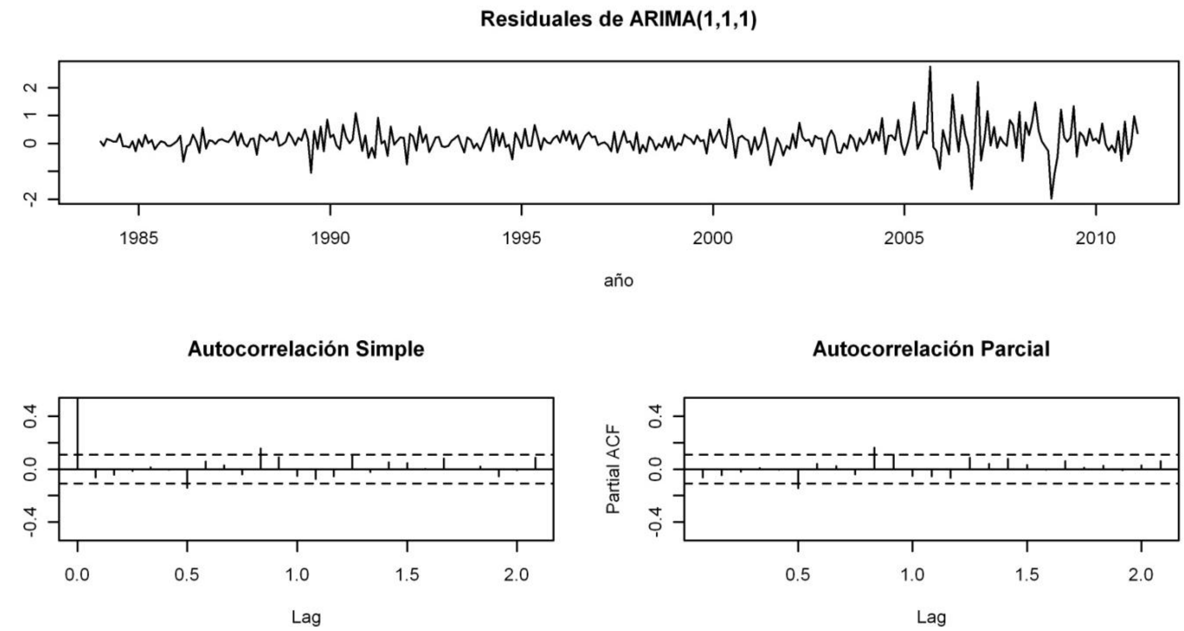


Fig. 6.2 La figura muestra los residuales del modelo $ARIMA(1,1,1)$ seleccionado para el IPC y sus respectivas autocorrelaciones.

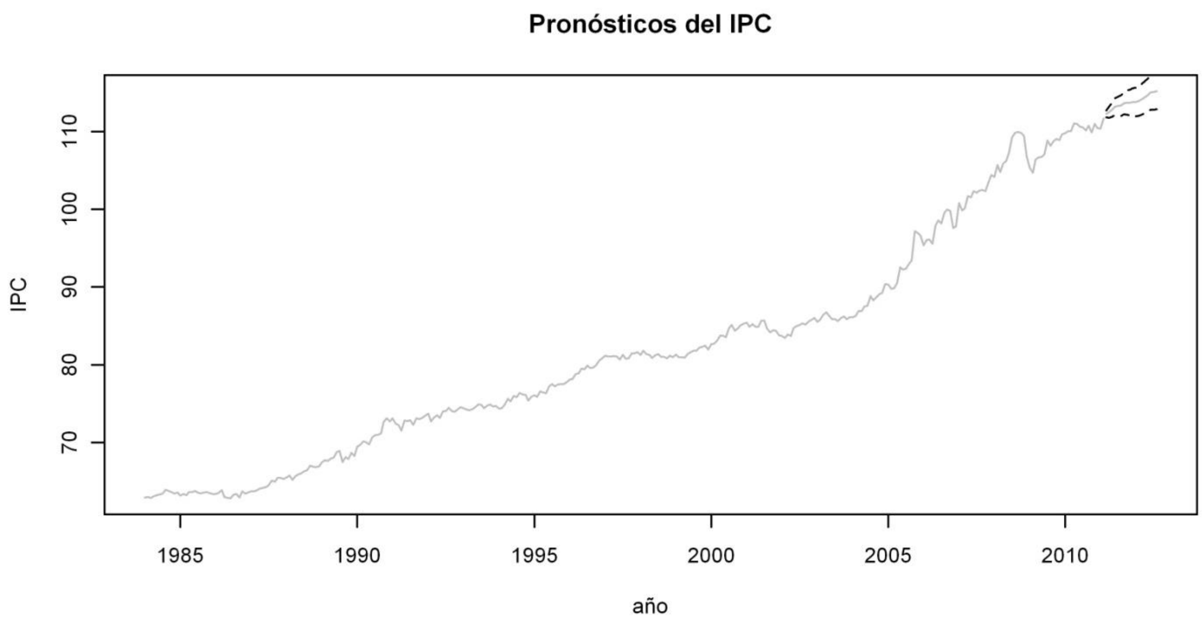


Fig. 6.3 La gráfica muestra el IPC proyectado a 5 meses, esto es hasta Julio de 2011.

	Mar-2011	***Apr-2011***	***May-2011***	***Jun-2011***	***Jul-2011***
ICS	*112.6337*	*112.9437*	*113.1569*	*113.332*	*113.4842*
	112.1699	***112.1596***	***112.1607***	***112.1606***	***112.1606***
ICI	*111.7060*	*111.3756*	*111.1646*	*110.9892*	*110.8371*

Tab. 6.1 La tabla muestra las proyecciones del IPC para Puerto Rico de marzo 2011 a julio 2011 con su respectivo intervalo de confianza.

6.2 Proceso Estacional Autoregresivo Integrado y de Media Móvil $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

Cuando una serie de tiempo en estudio tiene intervalos de observación menores a un año, entonces es frecuente que estas tengan variaciones ó patrones sistemáticos cada cierto periodo, estas variaciones sistemáticas inferiores a un año por ejemplo semestral, mensual, diario, etc. Deben ser captadas en los llamados Factores Estacionales, dentro de la estructura del modelo a construirse.

Las series de tiempo estacionales pueden ser de dos tipos:

- Aditivas
- Multiplicativas

Y al mismo tiempo cada una de estas series puede ser estacionaria o no estacionaria.
Usualmente se presentan con mayor frecuencia los modelos multiplicativos comparados con los modelos aditivos, de esta manera se combinan términos ordinarios del proceso $ARMA$ y términos estacionales, así como diferencias regulares y diferencias estacionales para transformar en series estacionarias, esto es $\nabla_s^D \nabla^d X_t$. Este tipo de procesos tiene las siguientes características:

- Contiene una componente $ARIMA(p,d,q)$ que modela la dependencia regular, que es la dependencia asociada a observaciones consecutivas.
- Contiene una componente $ARIMA(P,D,Q)$ que modela la dependencia estacional, que está asociada a observaciones separadas por s periodos.

La estructura general de un modelo $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$, es:

$$
\begin{aligned}
X_t = c + \overbrace{\emptyset_1 X_{t-1} + \cdots + \emptyset_p X_{t-p}}^{\boldsymbol{AR(p)}} + \overbrace{\theta_1 X_{t-s} + \cdots + \theta_P X_{t-Ps}}^{\boldsymbol{SAR(P)}} \\
+ \underbrace{\varepsilon_t - \varphi_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \varphi_q \varepsilon_{t-q}}_{\boldsymbol{MA(q)}} \underbrace{- \vartheta_1 \varepsilon_{t-s} - \cdots - \vartheta_Q \varepsilon_{t-Qs}}_{\boldsymbol{SMA(Q)}}
\end{aligned}
$$

Los parámetros son $\emptyset_1, \dots, \emptyset_p, \theta_1, \dots, \theta_P, \varphi_1, \dots, \varphi_q, \vartheta_1, \dots, \vartheta_Q$ y $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

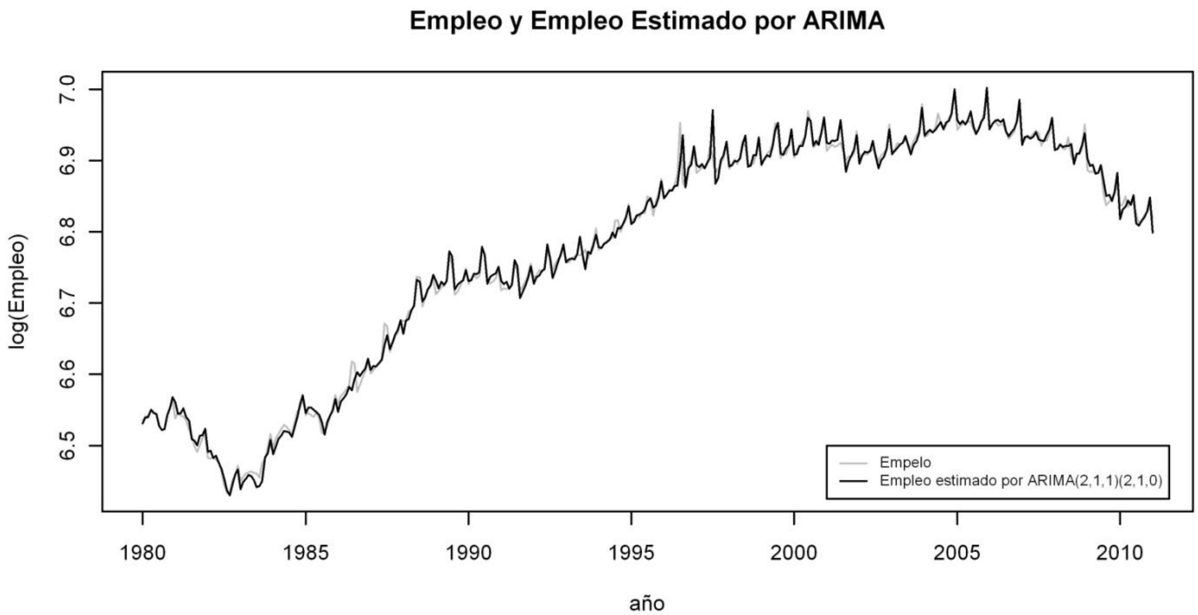


Fig. 6.4 La figura muestra la serie original del empleo en Puerto Rico y la serie del empleo estimado por el modelo $SARIMA(2,1,1)(2,1,0)$.

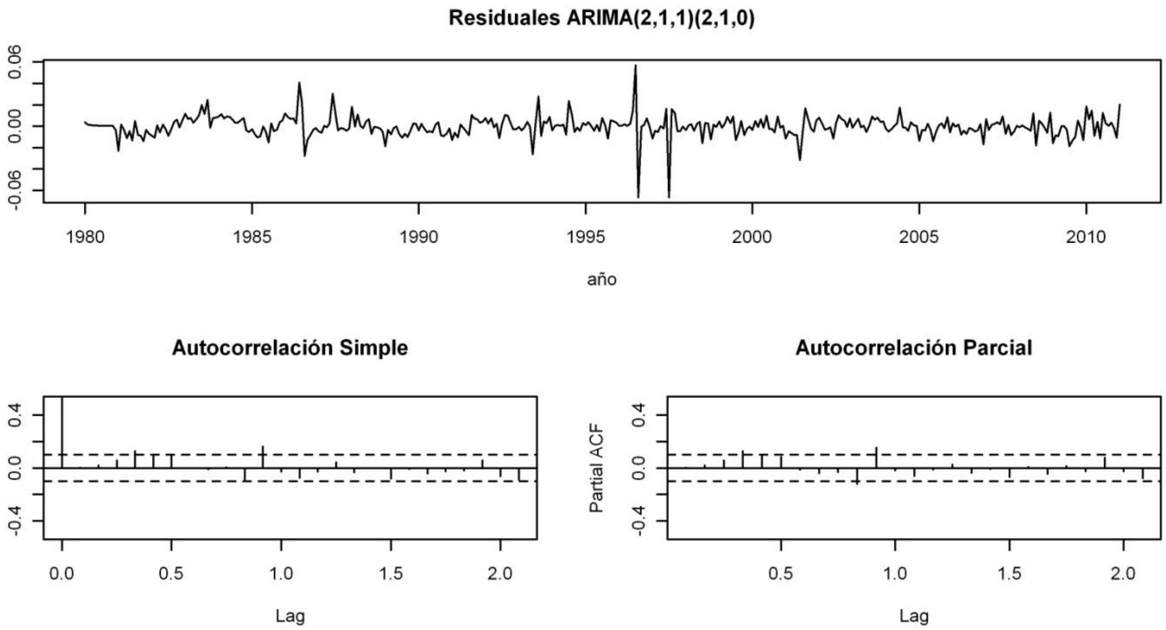


Fig. 6.5 La figura muestra los residuales del modelo $SARIMA(2,1,1)(2,1,0)$ seleccionado y sus respectivas autocorrelaciones.

Prueba de estacionariedad de los residuales

Ho: Los residuales del modelo ARIMA(2,1,1)(2,1,0) son estacionarios
Ha: Los residuales del modelo ARIMA(2,1,1)(2,1,0) no son estacionarios

Augmented Dickey-Fuller Test

data: residuales
Dickey-Fuller = -5.5384, Lag order = 7, ***p-value = 0.01***
alternative hypothesis: stationary

Prueba de independencia de los residuales

Ho: Los residuales del modelo ARIMA(2,1,1)(2,1,0) son independientes.
Ha: Los residuales del modelo ARIMA(2,1,1)(2,1,0) no son independientes.

Box-Pierce test
data: residuales
X-squared = 9e-04, df = 1, ***p-value = 0.976***

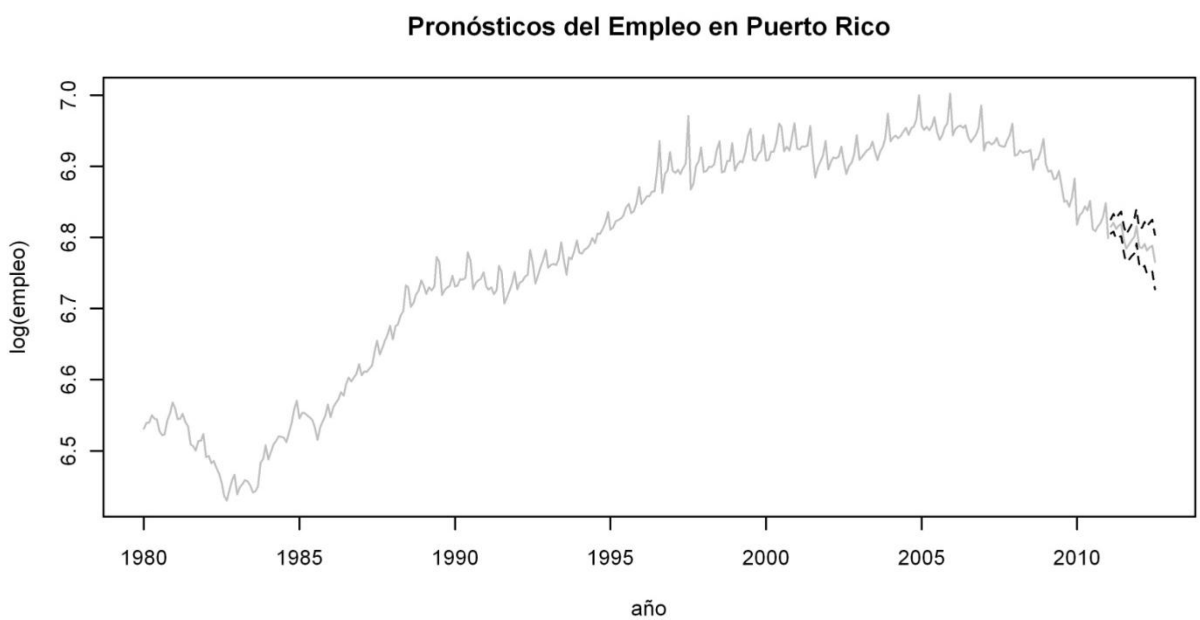


Fig. 6.6 La siguiente figura muestra el empleo en Puerto Rico proyectado a 5 meses, con el modelo $SARIMA(2,1,1)(2,1,0)$.

	Mar-2011	***Apr-2011***	***May-2011***	***Jun-2011***	***Jul-2011***
ICS	*920.9771*	*928.0298*	*921.4334*	*927.1217*	*930.8418*
	911.7477	***916.5787***	***908.6987***	***912.7053***	***914.9780***
ICI	*902.6107*	*905.2690*	*896.1400*	*898.5131*	*899.3846*

Tab. 6.2 La tabla muestra las proyecciones del empleo en Puerto Rico de febrero 2011 hasta junio de 2011, con su respectivo intervalo de confianza.

7.- Protocolo para la identificación de los modelos ARIMA y ARIMA estacional (según los pasos de Box-Jenkins)

a.- Identificación

Representar gráficamente la serie, además de su función de autocorrelación simple (ACF) y función de autocorrelación parcial (PACF). La gráfica de la serie nos indica si la serie es estacionaria o no. Según los motivos por los que la serie no es estacionaria, tendremos que aplicar los siguientes procedimientos hasta hacerla estacionaria.

- Si tiene tendencia: Tomaremos diferencias regulares hasta que desaparezca. Normalmente el orden de la diferencia es 1, y raramente será mayor a 3.

- Si la serie tiene estacionalidad: Tomaremos diferencias estacionales hasta que desaparezca el patrón estacional. En la práctica es muy raro tener que aplicar más de una diferencia estacional.

- Si es heterocedástica, es decir, no tiene varianza constante, habrá que transformar la serie. Con tomar el logaritmo en muchos casos es suficiente, aunque existen algunas transformaciones más sofisticadas, como las de Box-Cox.

Una vez que el gráfico de la nueva serie (transformación de la original) indica que es estacionaria, podemos intentar deducir la estructura de la serie (¡no la de la serie original!) observando su ACF y PACF.

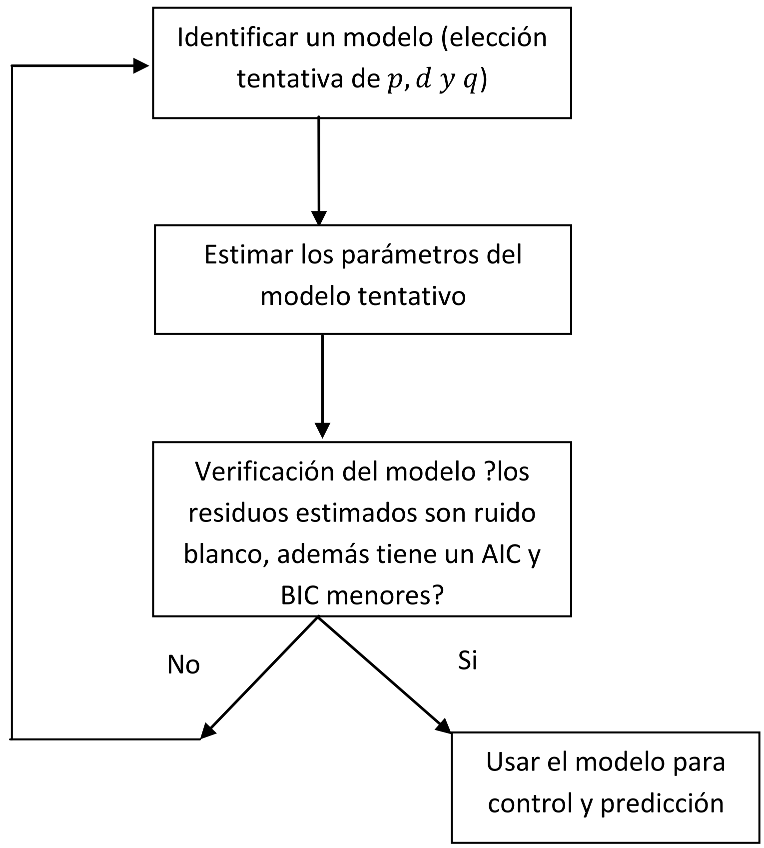
b.- Estimación y verificación

Observando las dos gráficas del ACF y PACF de la serie transformada podemos hacernos una idea del modelo que describe nuestra serie, o al menos de cuáles son los primeros candidatos que debemos probar. Para comprobar analíticamente (no visualmente) un modelo frecuentemente se ajusta varios modelos candidatos ARIMA(p,d,q) y escogeremos como un buen modelo aquel que tenga los residuales semejantes al de un ruido blanco, además que tenga los valores del AIC (Criterio de Información de Akaike*)* *y* BIC (Criterio de Información Bayesiana*)* menores con relación al resto de los modelos candidatos*.*

c.- Predicción

Una de las razones de la popularidad del proceso de construcción de modelos $ARIMA$ es su éxito en la predicción. Los modelos $ARIMA$ son buenos para realizar predicciones a corto plazo.

Estos tres puntos podemos resumir en el siguiente esquema



CÓDIGOS EN R

Código en R para simula un ruido blanco

```
#Simulamos 100 números aleatorios que sean ruido blanco con media cero y varianza uno
#rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
g=rnorm(100,0,1)
par(mfrow=c(1,2))
ts.plot(g,main="Nii(0,1)")
acf(g, main="Autocorrelación Simple",ylim=c(-1,1),ci.col="black",ylab="")
```

Código en R para simular un camino aleatorio.

```
w=rnorm(100)
x=w
for (t in 2:100) x[t] <- x[t - 1] + w[t]
par(mfrow=c(2,2))
ts.plot(x, main="Camino aleatorio Xt")
acf(x, main="Autocorrelación Simple de Xt",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black",ylab="")
d=diff(x)
ts.plot(d,main="Primera diferencia de Xt")
acf(d, main="Autocorrelación Simple de d",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black",ylab="")
```

Código en R para simular un proceso auroregresivo de orden 1 AR(1)

```
# Simulación de un proceso AR(1) con phi=0.4
 layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
 AR=arima.sim(list(order=c(1,0,0), ar=.4), n=100)
 plot(AR, ylab=" ", main=(expression(AR(1)~~~phi==+.4)))
 acf(AR, main="Autocorrelación Simple",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black",ylab="")
 pacf(AR,main="Autocorrelación Parcial",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black")
```

Código en R para simular un proceso de media móvil de orden 1 MA(1)

```
#Simulación de un proceso MA(1) con theta=0.5
 layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
 MA=arima.sim(list(order=c(0,0,1), ma=.5), n=100)
 plot(MA, ylab=" ", main=(expression(MA(1)~~~theta==+.5)))
 acf(MA, main="Autocorrelación Simple",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black",ylab="")
 pacf(MA,main="Autocorrelación Parcial",ylim=c(-.5,.5),ci.col="black")
```

Código en R para un proceso ARMA

```
# Utilizaremos la serie del cambio porcentual mes a mes del consumo de energía eléctrica  de Puerto
#Rico de febrero de 2002 a diciembre  2010.
CP.CEE=read.delim("clipboard")
attach(CP.CEE)
CEE=ts(CP.CEE,star=c(2002,2),frequency=12)
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(CEE,main="Consumo de energía eléctrica 02/2002-12/2010", ylab="Cambio Porcentual")
acf(CEE, main="Autocorrelación Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(CEE,main="Autocorrelación Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
#Modelo 1 tentativo ARMA(2,1)
arma21<−arima(CEE,order=c( 2,0,1))
aic21<−arma21$aic
aic21=550.5935
par(mfrow=c(1,2))
acf(arma21$residuals, main="Autocorrelacion Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(arma21$residuals,main="Autocorrelacion Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
 #Modelo 2 tentativo ARMA(2,2)
arma22<−arima(CEE,order=c( 2,0,2))
aic22<−arma22$aic
aic22=552.5884
par(mfrow=c(1,2))
acf(arma22$residuals, main="Autocorrelacion Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(arma22$residuals,main="Autocorrelacion Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
#Modelo 3  tentativo ARMA(1,1)
arma11<−arima(CEE,order=c( 1,0,1))
aic11<−arma11$aic
aic11=550.2842
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(arma11$residuals,main="Residuales del modelo ARMA(1,1)",ylab="",xlab="")
acf(arma11$residuals, main="Autocorrelación Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(arma11$residuals,main="Autocorrelación Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
# predicciones
fit=fitted.values(arma11)
fore = predict(arma11, n.ahead=5)
fore
ICS=fore$pred+fore$se
ICI=fore$pred-fore$se
```

Código en R para un ARIMA

```
# Utilizaremos la serie del Índice de Precios al Consumidos de Puerto Rio de
 # enero de 1984 a febrero de 2011
IPCPR=read.delim("clipboard")
attach(IPCPR)
IPC=ts(IPCPR,star=c(1984,1),frequency=12)
ts.plot(IPC,main="Índice de Precios al Consumidor 01/1984-02/2011", ylab="IPC")
#Primer diferencia
ten=diff(IPC,lag=1,difference=1)
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(ten,main="Primera diferencia del IPC",xlab="año",ylab="")
acf(ten, main="Autocorrelación Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(ten,main="Autocorrelación Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
#Modelo 1 tentativo ARIMA(2,1,1)
ar1<−arima(IPC,order=c( 2,1,1))
#Modelo 2 tentativo ARIMA(1,1,2)
ar2<−arima(IPC,order=c( 1,1,1))
#Modelo 3 tentativo ARIMA(1,1,1)
ar3<−arima(IPC,order=c( 1,1,1))
#Análisis de residuales del modelo 3
res=ar3$residuals
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(res,main="Residuales de ARIMA(1,1,1)",xlab="año",ylab="")
acf(res, main="Autocorrelación Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(res,main="Autocorrelación Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
###prueba de estacionariedad de Dickey-Fuller para los residuales del modelo seleccionado
adf.test(res)
###Prueba de independencia de Box-Pierce para los residuales del modelo seleccionado
Box.test(res)
# IPC estimado por ARIMA
fit=fitted.values(ar3)
ten=cbind(IPC,fit)
ts.plot(ten,col=8:10,main="IPC original y estimado por ARIMA",xlab="año",ylab="IPC")
bandas <- expression("IPC original", "IPC con ARIMA(1,1,1)")
legend(2005,70, bandas,lty=1, col=c(8,1),cex=.9)
# Pronósticos del IPC
fore = predict(ar3, n.ahead=5)
ts.plot(fit,fore$pred,col=8:10,xlab="año",ylab="IPC",main="Pronósticos del IPC")
lines(fore$pred,col=8:10)
lines(fore$pred+fore$se, lty="dashed", col=1)
lines(fore$pred-fore$se, lty="dashed", col=1)
```

Códigos en R para un ARIMA con estacionalidad

```
## Para ilustrar el modelos SARIMA utilizaremos la serie de Empleo en Puerto Rico de enero de 1980 a
#enero de 2011
library(zoo)
 library(quadprog)
 library(tseries)
 library(fracdiff)
 library(forecast)
empleo=read.delim("clipboard")
attach(empleo)
empleo=log(empleo[,3])
empleo=ts(empleo,star=c(1980,1),frequency=12)
ts.plot(empleo,ylab="log(empleos)",xlab="año",main="Empleo en Puerto Rico 01/1980-12/2010")
### Primera diferencia ###
a=diff(empleo,lag=1,difference=1)
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(a,main="Primera diferencia",xlab="año", ylab="")
acf(a, main="Atucorrelacion Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(a, main="Autocorrelacion Parcial",, ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
### primera diferencia estacional ###
b=diff(a,lag=12,difference=1)
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(b,main="Primera diferencia estacional", ylab="")
acf(b, main="Autocorrelacion Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(b,main="Autocorrelacion Parcial",ci.col="black", ylab="",ylim=c(-.5,.5))
### Elección del modelo ###
ar=arima(empleo,order=c(2,1,1),seas=list(order=c(2,1,0),period=12))
### fit value VS serie original
fit=fitted.values(ar)
ten=cbind(empleo,fit)
ts.plot(ten,col=8:10,main="Empleo y Empleo Estimado por ARIMA",ylab="log(Empleo)",xlab="año")
bandas <- expression("Empelo", "Empleo estimado por ARIMA(2,1,1)(2,1,0)")
legend(1993,6.5, bandas,lty=1, col=c(8,1),cex=.7)
### analisis de residuales##
res=ar$residuals
layout(matrix(c(1,1,2,3), 2, 2, byrow = TRUE))
ts.plot(res,main="Residuales ARIMA(2,1,1)(2,1,0)",xlab="año",ylab="")
acf(res, main="Atucorrelacion Simple",ci.col="black",ylab="",ylim=c(-.5,.5))
pacf(res,main="Autocorrelacion Parcial",ci.col="black",ylim=c(-.5,.5))
### prueba de estacionariedad de Dickey-Fuller##
adf.test(res)
###Prueba de aleatoriedad de Box-Pierce#
Box.test(res)
### normalidad de los residuales###
par(mfrow=c(1,2))
hist(res,main="Histogram of residuals")
```

```
qqnorm(res,main="Q-Q plot of residuals")
qqline(res)
### pronósticos ###
fit=fitted.values(ar)
fore = predict(ar, n.ahead=18)
ts.plot(fit,fore$pred,col=8:10,xlab="año",ylab="log(empleo)",main="Pronósticos del Empleo en Puerto
Rico")
lines(fore$pred,col=8:10)
lines(fore$pred+fore$se, lty="dashed", col=1)
lines(fore$pred-fore$se, lty="dashed", col=1)
fore = predict(ar, n.ahead=5)
fore
fo=fore$pred
predi=2.7183^fo
predi
```